CURSOS 0

MATEMÁTICAS

Números Complejos

Mª Paz Peinado Cros

Departamento de Matemática Aplicada I

ETSI Industriales

UNED

CURSOS 0

Índice general

1. Introducción y objetivos

En nuestra vida cotidiana, estamos acostumbrados a operar con números reales, y no encontramos aparentemente la necesidad ni la utilidad de los números complejos. Sin embrago, son muy útiles en nuestro mundo actual en el que la ciencia y la técnica están muy presentes: en el electromagnetismo, la hidrodinámica, la electrotecnia y otros campos de la ingeniería los números complejos son una potente herramienta de cálculo. Así grandes obras de la ingeniería: centrales eléctricas, redes de distribución, parques eólicos..., necesitan los números complejos para su funcionamiento

Los números complejos nacieron de la necesidad de encontrar soluciones a ecuaciones en las que aparecen raíces cuadradas de números negativos. En el conjunto de los números reales no existe ningún número que al elevarlo al cuadrado nos de -1, es decir no hay solución a $\sqrt{-1}, \sqrt{-2}$... .Ya en el siglo I, Herón de Alejandría se topó con este tipo de raíces que no supo interpretar. En el s. XVI, Cardano al resolver un problema llegó a dos soluciones complejas y decidió que eran números sin sentido, imaginarios. Y fue Gauss en el siglo XIX, quien dió sentido a los números complejos.

Teniendo en cuenta que $\sqrt{a} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-1}$ el problema se centró en encontrar un número que al elevarlo al cuadrado sea igual a -1. Este número, $\sqrt{-1}$, fue designado en 1777 por el matemático suizo Euler con la letra i (imaginario) y llamado unidad imaginaria.

Los contenidos de este tema son necesarios para el primer curso de cualquier Ingeniería o carrera de ciencias.

Objetivos

- Manejar la forma binómica de los números complejos y sus operaciones.

- Representar geométricamente los números complejos en el plano.
- Conocer y utilizar la relación entre la forma binómica y la forma polar de los números complejos.
- Manejar la forma polar de los números complejos y sus operaciones.
- Utilizar la fórmula de Moivre para calcular $\operatorname{sen} n\alpha$ y $\cos n\alpha$.
- Calcular raíces n-ésimas de número complejos.

2. Prueba de autodiagnóstico

Haga el test siguiente para evaluar su nivel de conocimientos.

$i^{23} = -i$	**Verdadero**	**Falso**
$(2-i)-(1-3i)=1+2i$	**Verdadero**	**Falso**
$(1-i)\cdot(2+3i)=5+3i$	**Verdadero**	**Falso**
$\dfrac{-10-4i}{-1+i}=3+7i$	**Verdadero**	**Falso**
$-1+i=2_{135^0}$	**Verdadero**	**Falso**
$2_{180^0}=-2i$	**Verdadero**	**Falso**
$2_{60^0}\cdot 3_{120^0}=-3_{180^0}$	**Verdadero**	**Falso**
$\left(2_{20^0}\right)^3=8_{60^0}$	**Verdadero**	**Falso**
La fórmula de Moivre dice: $\left[\left(r\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha\right)\right]^n=r^n\left(\cos n\alpha+i\operatorname{sen} n\alpha\right)$	**Verdadero**	**Falso**
Las raíces $\sqrt[4]{16}$ son cuatro y tienen módulo 16	**Verdadero**	**Falso**

Si ha tenido muchas dificultades y el número de respuestas correctas no le parece aceptable, debe hacer de forma ordenada todas las fichas que encontrará a continuación.Si sólo ha tenido dificultades en algunos casos, localice las fichas correspondientes y repáselas. Si ha respondido todo correctamente puede pasar a otro bloque.

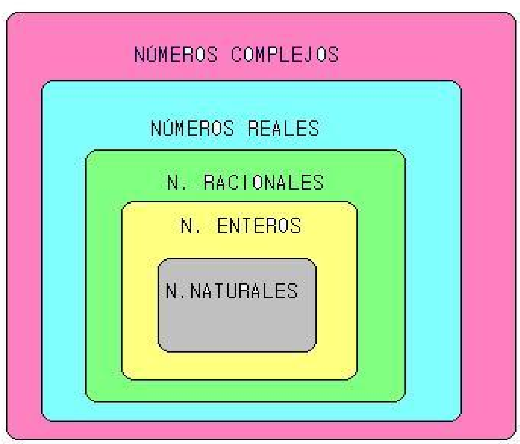
3. Contenidos

3.1. Ficha 1: Ampliación del conjunto de los números reales: el conjunto de los números complejos

Si intentamos resolver ecuaciones de segundo grado aparentemente sencillas, como puede ser la ecuación $x^2 + 1 = 0$, nos encontramos que las soluciones son los números que cumplen $x = \pm\sqrt{-1}$, y no conocemos ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -1 ó a ningún número negativo.

Existen muchos ejemplos de este tipo, en los que surgen raíces de números negativos, lo cual hace necesario ampliar el conjunto de los números reales e "inventar'ún número cuyo cuadrado sea igual a -1. A este numero se le designa con el número de unidad imaginaria: $i = \sqrt{-1}$

Si al Conjunto de los Números Reales, le añadimos el conjunto de los números imaginarios, el resultado es el Conjunto de los Números Complejos.



Ejemplo 1. Al resolver la ecuación $x^2 + 9 = 0$ no encontramos solución dentro del conjunto de los números reales. Los números que son solución de esta ecuación son números imaginarios.

$$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9}$$

No conocemos ningún número real cuyo cuadrado sea -9.

Pero las soluciones las podemos escribir de la siguiente forma:

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3i$$

Es decir la ecuación $x^2 + 9 = 0$ tiene por solución los números complejos $z_1 = 3i$ y $z_2 = -3i$.

Lo mismo ocurre al resolver la ecuación

$$x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Las soluciones son números imaginarios.

Forma binómica La forma binómica de un número complejo z es la expresión de la forma $z = a + bi$:

- Al número **a** se le llama *parte real* del número complejo.
- Al número **b** se le llama *parte imaginaria* del número complejo.

Si $b = 0$ el número complejo se reduce al número real $z = a$.

Si $a = 0$ el número complejo se reduce a $z = bi$, y se dice que es un *número imaginario puro*.

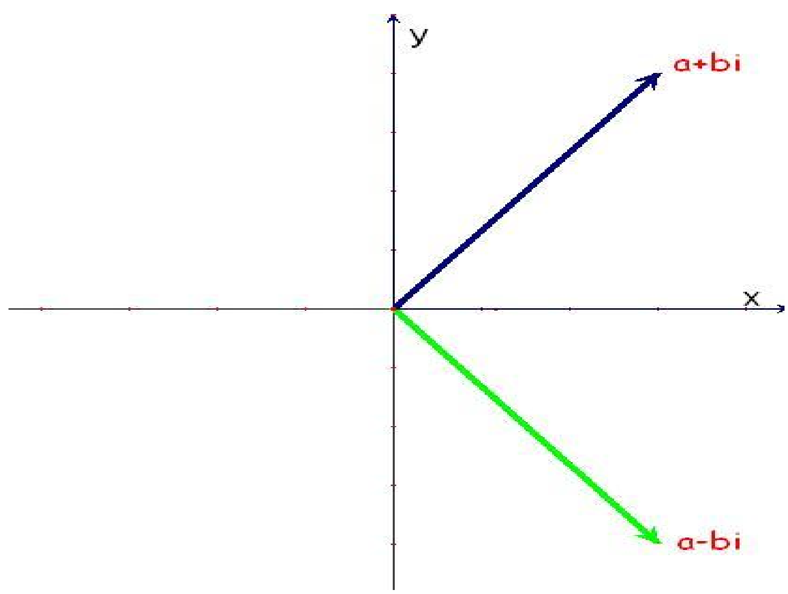
Complejos iguales Dos números complejos, $z = a+bi$ y $z' = a'+b'i$, son iguales si lo son sus partes reales e imaginarias respectivamente.

$$z = z' \Leftrightarrow a + bi = a' + b'i \Longleftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Conjugado El conjugado de z, es otro número complejo, que se representa por $\overline{\mathbf{z}}$ y tiene:

- La parte real igual que la de z.
- La parte imaginaria opuesta que la de z.

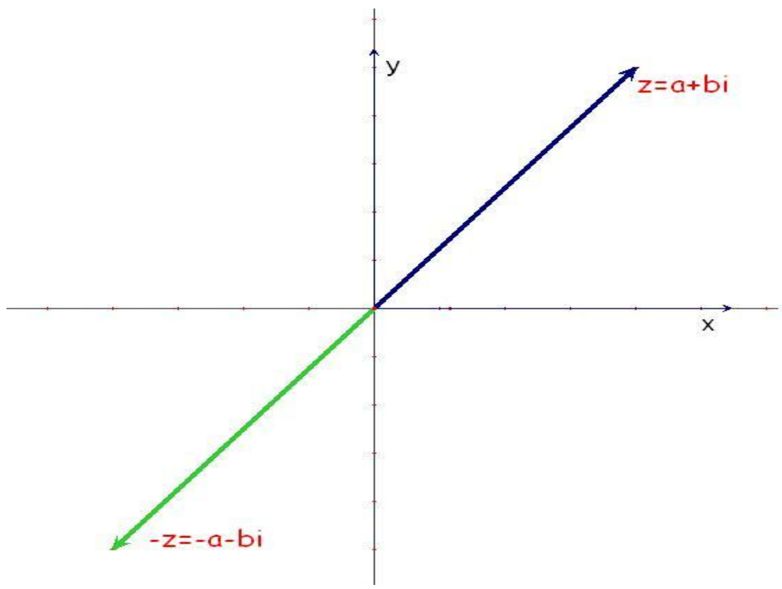
Si $z = a + bi$, su conjugado es $\overline{z} = a - bi$.



Opuesto El opuesto de un número complejo no se debe de confundir con el conjugado. El opuesto de z, es otro número complejo que se representa por: $-\mathbf{z}$ y tiene:

- La parte real opuesta que la de z.
- La parte imaginaria opuesta que la de z.

Si $z = a + bi$, su opuesto es $-z = -a - bi$



Ejemplo 2. Si tenemos los siguientes números complejos:

- $z_1 = 2 - 3i$
- $z_2 = 5i$
- $z_3 = -8$

La parte real de z_1 es $a = 2$ y la parte imaginaria $b = -3$.
La parte real de z_2 es $a = 0$ y la parte imaginaria $b = 5$, es decir, es un número imaginario puro ya que su parte real es nula. Los números complejos $-4i, \sqrt{5}i, \frac{5}{3}i, 6i$ también son números imaginarios puros.
La parte real de z_3 es $a = -8$ y la parte imaginaria $b = 0$, es decir, es un número real y al mismo tiempo un número complejo.
El conjunto de los números reales es un subconjunto de los números complejos. Los números $-7, \sqrt{5}, \frac{7}{3}, 2$ también son números reales y complejos con parte imaginaria nula.

Ejemplo 3. Los siguientes pares de números complejos:

- $3 - 2i$ y $3 + 2i$
- $-5i$ y $5i$
- $1 + \sqrt{3}$ y $1 - \sqrt{3}$

están formados por números complejos conjugados.
Es fácil de ver que tienen la parte real igual y la parte imaginaria opuesta.
Mientras que los siguientes pares de números complejos son opuestos:

- $3 - 2i$ y $-3 + 2i$
- $-5i$ y $5i$
- $1 + \sqrt{3}$ y $-1 - \sqrt{3}$

ya que sus partes real e imaginaria son opuestas.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1. Resuelve las siguientes ecuaciones e indica sus soluciones en el Conjunto de los Complejos:

a. $x^3 - 2x^2 + 5x = 0$,
b. $x^2 - 2x + 3 = 0$

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 2. Calcular los números opuestos y conjugados de los siguientes números:

a. $z_1 = 3 - 5i$,
b. $z_2 = -\sqrt{2}i$,

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 3. Dado el número complejo $z = 2 - \sqrt{5}i$, calcula:

a. Su opuesto.
b. Su conjugado.
c. El conjugado de su conjugado.
d. El opuesto de su conjugado.
e. El conjugado de su opuesto.
f. ¿Qué relación existe entre estos dos últimos?.

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva repasar esta ficha.

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 1.

a. $x_1 = 0, \quad x_2 = 1 + 2i, \quad x_3 = 1 - 2i$

Estas soluciones se pueden obtener operando de la siguiente manera:

$$x^3 - 2x^2 + 5x = x(x^2 - 2x + 5) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x + 5 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 + 2i \\ x_3 = 1 - 2i \end{cases}$$

A las soluciones x_1 y x_2, se llegan solucionado la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$. b. $\quad x_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}i}{2}, \quad x_2 = 1 - \dfrac{\sqrt{3}i}{2}$

Estas soluciones se pueden obtener operando de la siguiente manera:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-9}}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}i}{2} \\ \\ x_2 = 1 - \dfrac{\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

Solución del ejercicio 2.

a. $-z_1 = -(3 - 5i) = -3 + 5i \quad$ y $\quad \overline{z}_1 = 3 - (-5i) = 3 + 5i$

b. $-z_2 = -(-\sqrt{2}i) = \sqrt{2}i \quad$ y $\quad \overline{z}_2 = -(-\sqrt{2}i) = \sqrt{2}i$

Solución del ejercicio 3.

a. $-z = -(2-\sqrt{5}i) = -2+\sqrt{5}i$

b. $\overline{z} = 2-(-\sqrt{5}i) = 2+\sqrt{5}i$

c. $\overline{\overline{z}} = \overline{(2+\sqrt{5}i)} = 2-\sqrt{5}i = z$

d. $-\left(\overline{z}\right) = -(2+\sqrt{5}i) = -2-\sqrt{5}i$

e. $\overline{(-z)} = \overline{(-2+\sqrt{5}i)} = -2-\sqrt{5}i$

f. Son iguales.

3.2. Ficha 2: Operaciones con números complejos en forma binómica

Suma y resta La suma (o resta) de números complejos es otro número complejo cuya parte real se obtiene de la suma (o resta) de las partes reales y cuya parte imaginaria se obtiene de la suma (o resta) de las partes imaginarias de los números que se están sumando (o restando)

Suma: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$

Resta: $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$

Producto El producto de dos números complejos es otro número complejo que se obtiene de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

Cociente La división de dos números complejos es otro número complejo.

Para calcularlo mutiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador. Así se consigue tener en el denominador un número real, ya que el producto de un número complejo por su conjugado es siempre un número real.

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= aa - abi + abi - bbi^2 \\ &= aa + bb + (-ab + ab)i = a^2 + b^2\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta este resultado el cociente es:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

No hay que olvidar que no se puede dividir un número complejo por 0.

Ejemplo 4. Dados dos números complejos:

$$z_1 = 2-3i \qquad z_2 = 1+5i$$

podemos realizar las siguientes operaciones:

- $\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2} = (2-3i)+(1+5i) = 2+1+(-3+5)i = 3+2i$
- $\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2} = (2-3i)-(1+5i) = 2-1+(-3-5)i = 1-8i$
- $\mathbf{z_1} \cdot \mathbf{z_2} = (2-3i)\cdot(1+5i) = 2+10i-3i-15i^2 = 2+15+(10-3)i = 17+7i$
- $\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}} = \frac{2-3i}{1+5i} = \frac{(2-3i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)} = \frac{2-10i-3i+15i^2}{1-5i+5i-25i^2} = \frac{-13-13i}{1+25} = \frac{-13-13i}{26} = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i$

Potencias de i Antes de desarrollar la potencia en general de un número complejo, vamos a realizar la potencia de la unidad imaginaria i.

Teniendo en cuenta que $i = \sqrt{-1}$ y, que tal y como ocurre en los números reales $i^0 = 1$ y $i^1 = i$, desarrollamos las potencias de i:

$$i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$
$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$
$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$
$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$$

Se puede observar que a partir de $n = 4$, las potencias de i se repiten cada cuatro valores.

Por esto, en general, para calcular una potencia de i, se divide su exponente por 4 y se mira el resto de la división.

Así todas las potencias cuyo exponente da resto 0 al dividirlo por 4 serán igual a $i^0 = 1$. Las potencias cuyo exponente da resto 1 al dividirlo por 4 uno, serán igual a $i^1 = i$, las que da de resto 2 serán igual a $i^2 = -1$ y las de resto 3 serán igual a $i^3 = -i$.

Por ejemplo, $i^{22} = i^2 = -1$ porque 22 entre 4 da de resto 2.

Ejemplo 5. Para calcular una potencia de i tendremos en cuenta que se repiten de cuatro en cuatro, y por ello dividiremos el exponente por 4 y nos fijaremos en el resto de la división. Así:

- $i^{540} = i^{135 \cdot 4} = i^0 = 1$
- $i^{61} = i^{15 \cdot 4+1} = i^1 = i$
- $i^{26} = i^{6 \cdot 4+2} = i^2 = -1$
- $i^{2003} = i^{500 \cdot 4+3} = i^3 = -i$

Potencia de z

La potencia de un número complejo $\mathbf{z^n}$ se calcula multiplicando z por sí mismo n veces.

La potencia de un número complejo se puede hacer desarrollando la potencia del binomio $(a + bi)$ y teniendo en cuenta los valores de las potencias del número i.

También para desarrollar una potencia de un número complejo, se puede considerar un número complejo como un binomio en i, y desarrollar cualquier potencia teniendo en cuenta el desarrollo del binomio de Newton. Ahora bien, esta forma de calcular las potencias de números complejos no es práctica para exponentes mayores que 3.

Es mucho más sencillo calcular la potencia de un número complejo, teniendo dicho número expresado en forma polar como se ve en la ficha 5.

Ejemplo 6. Dado el número complejo $z_1 = 3 + \sqrt{5}i$, si queremos calcular $(z_1)^2$, sabemos que desarrollando la igualdad notable del cuadrado de una suma queda:

$$\begin{aligned} z_1^2 &= (3+\sqrt{5}i)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot \sqrt{5}i + (\sqrt{5}i)^2 \\ &= 9 + 6\sqrt{5}i - 5 = 4 + 6\sqrt{5}i \end{aligned}$$

Si lo que queremos es saber cuánto vale $(z_1)^3$ se puede calcular a partir de la potencia de $(z_1)^2$, multiplicándola por z_1 o teniendo en cuenta el desarrollo de un binomio al cubo según el binomio de Newton:

$$\begin{aligned} z_1^3 &= (3+\sqrt{5}i)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot \sqrt{5}i + 3\cdot 3\cdot (\sqrt{5}i)^2 + (\sqrt{5}i)^3 \\ &= 27 - 27\sqrt{5}i - 9\cdot 5 - 5\sqrt{5}i = 27 - 45 - 32\sqrt{5}i \\ &= -18 - 32\sqrt{5}i \end{aligned}$$

Si las potencias del número complejo tienen un exponente más alto, este método resulta poco práctico. Resultaría más rápido el pasar el número complejo de forma binómica a polar, y desarrollar la potencia en forma polar. Ésto se ve más adelante en la ficha 5.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 4. Dados los números complejos

- $z_1 = 3 - 2i$
- $z_2 = -7 + 2i$

Calcula:

a. $z_1 + z_2$
b. $3z_1 - z_2$

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 5. Calcula los siguientes productos:

a. $(4 - 3i)(5 + i)$
b. $(7 - i)(7 + i)$

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 6. Calcula los siguientes cocientes:

a. $\dfrac{4 - 3i}{5 - i}$
b. $\dfrac{1}{i}$

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 7. Calcula las siguientes potencias:

a. i^{226}
b. $(1 - \sqrt{3}i)i^{121}$

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 8. Calcula las siguientes potencias:

a. $(\sqrt{2}+i)^2$
b. $(1+i)^3$

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 4.

a. $z_1 + z_2 = (3-2i) + (-7+2i) = 3 - 7 + (-2+2)i = -4$

b. $3z_1 - z_2 = 3(3-2i) - (-7+2i) = (9-6i) - (-7+2i)$
$= 9 + 7 + (-6-2)i = 16 - 8i$

Solución del ejercicio 5.

a. $(4-3i)(5+i) = 20 + 4i - 15i - 3i^2$
$= 20 + 3 + (4-15)i = 23 - 11i$

b. $(7-i)(7+i) = 49 + 7i - 7i - i^2 = 49 + 1 + (7-7)i = 50$

Solución del ejercicio 6.

a. $\dfrac{4-3i}{5-i} = \dfrac{(4-3i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \dfrac{20+3+(4-15)i}{25+1} = \dfrac{23}{26} - \dfrac{11}{26}i$

b. $\dfrac{1}{i} = \dfrac{-i}{i(-i)} = \dfrac{-i}{-i^2} = \dfrac{-i}{1} = -i$

Solución del ejercicio 7.

a. $i^{226} = i^{56\cdot 4+2} = i^2 = -1$

b. $(1-\sqrt{3}i)i^{121} = (1-\sqrt{3}i)i^{30\cdot 4+1} = (1-\sqrt{3}i)i$
$= i - \sqrt{3}i^2 = i + \sqrt{3}$

Solución del ejercicio 8.

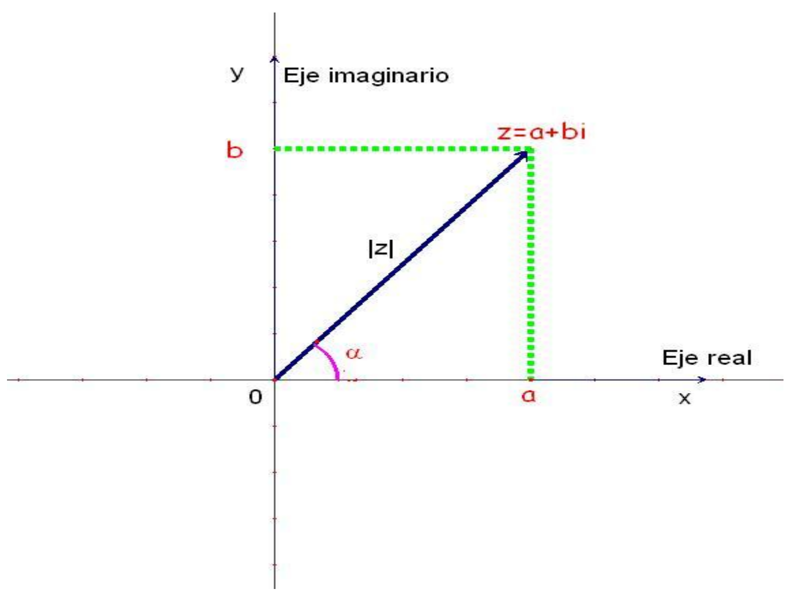
a) $(\sqrt{2}+i)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}i + i^2 = 2 - 1 + 2\sqrt{2}i = 1 + 2\sqrt{2}i$

b) $(1+i)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$

3.3. Ficha 3: Representación en el plano de un número complejo

Los números reales los representamos sobre una recta numérica a la que llamamos recta real. ¿Y los números complejos dónde los podemos representar?.

Como un número complejo $z = a+bi$ depende del valor de dos números: a y b, lo podremos representar fácilmente sobre unos ejes cartesianos. En el eje de abcisas se representa la parte real del número complejo y se llama **eje real**, y en el eje de ordenadas la componente imaginaria, y se llama **eje imaginario**. Así, se habla de recta real y **plano complejo**.



De esta manera a cada número complejo $z = a+bi$ le hacemos corresponder en el plano un punto $A(a, b)$, que denominamos afijo. Y además a cada número complejo se le asocia el vector de posición de su afijo.

$$z = a + bi \rightarrow A(a, b) \rightarrow \overrightarrow{0A}$$

Lo que se hace es asociar a cada número complejo un vector. Dicho vector queda perfectamente definido por su módulo y su argumento.

Módulo Normalmente el módulo de un número complejo se representa por **|z|.**

Si nos fijamos en la representación gráfica de un número complejo, se ve que se forma un triángulo rectángulo de catetos la parte real (a) e imaginaria (b), y de hipotenusa el módulo de z ($|z|$).

Y si en dicho triángulo rectángulo aplicamos el teorema de Pitágoras nos queda la expresión del módulo de un número complejo $z = a + bi$:

$$|z| = \left|\overrightarrow{0A}\right| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento El argumento de un número complejo $z = a+bi$ es el ángulo que forma el semieje positivo de abcisas con la recta que contiene al vector $\overrightarrow{0A}$ y se le representa como

$$arg(z) = \alpha$$

Teniendo en cuenta la definición de tangente trigonométrica de un ángulo, se deduce que:

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & \text{si} \quad a \neq 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad a = 0 \text{ y } b > 0 \\ \alpha = \frac{3\pi}{2} & \text{si} \quad a = 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$$

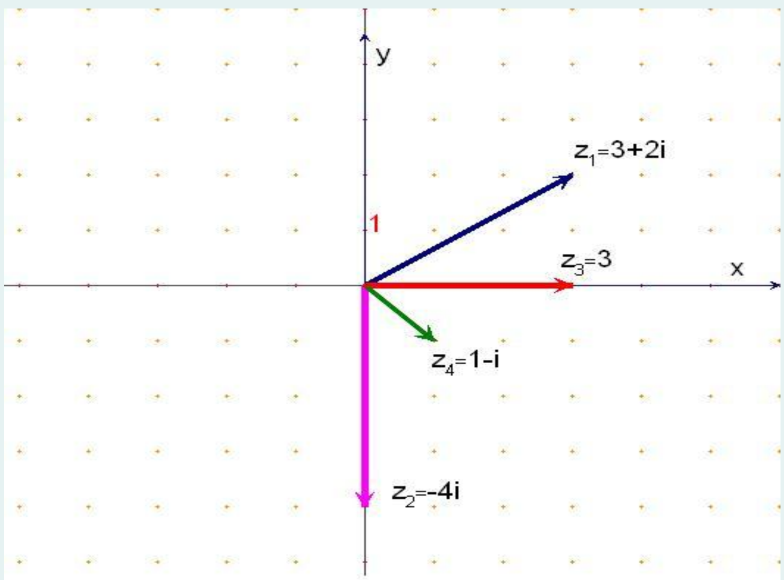
La igualdad $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}$ la cumplen infinitos ángulos. Pero si añadimos la condición $0 \leq \alpha < 2\pi$, sólo hay 2 ángulos que difieren en π *radianes* y tienen la misma tangente.

Para saber cuál de ellos es el argumento, resulta muy práctico representar $z = a + bi$ y así se averigua en qué cuadrante está z y que valores puede tomar el argumento de z según el cuadrante en el que está situado. A este argumento también se le denomina *argumento principal*.

Ejemplo 7. Si queremos representar los siguientes números complejos

$$\begin{array}{ll} z_1 = 3 + 2i & z_2 = -4i \\ z_3 = 3 & z_4 = 1 - i \end{array}$$

lo que hacemos es calcular las coordenadas de su afijo, lo dibujamos y pintamos el vector que une el origen de coordenadas con el afijo.



Los cuatro números expuestos tienen por afijos (3,2), (0,-4), (3,0) y (1,-1) respectivamente, y están situados:

- z_1 en el primer cuadrante,
- z_2 sobre el eje imaginario,
- z_3 sobre el eje real,
- z_4 en el cuarto cuadrante.

Ejemplo 8. De los números complejos del ejemplo anterior

$$\begin{array}{ll} z_1 = 3 + 2i & z_2 = -4i \\ z_3 = 3 & z_4 = 1 - i \end{array}$$

podemos calcular sus respectivos módulos y argumentos.

Si nos fijamos en su representación en el plano, y utilizando el teorema de Pitágoras y la definición de la tangente de un ángulo, tenemos:

$|z_1| = +\sqrt{3^2 + 2^2} = +\sqrt{13}$

$|z_2| = +\sqrt{0^2 + (-4)^2} = +\sqrt{16} = 4$

$|z_3| = +\sqrt{3^2 + 0^2} = +\sqrt{9} = 3$

$|z_4| = +\sqrt{1^2 + (-1)^2} = +\sqrt{2}$

Y sus argumentos son:

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} = 33,69^0 \qquad \alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{-4}{0} = 180^0$$

$$\alpha_3 = \operatorname{arctg} \frac{0}{3} = 0^0 \qquad \alpha_4 = \operatorname{arctg} \frac{-1}{1} = 315^0$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 9. Representa en el plano complejo los siguientes números:

a. $z_1 = -1 - i$
b. $z_2 = 4 + 4\sqrt{3}i$
c. $z_3 = 2i$

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 10. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

a. $z_1 = -1 - i$
b. $z_2 = 4 + 4\sqrt{3}i$
c. $z_3 = 2i$

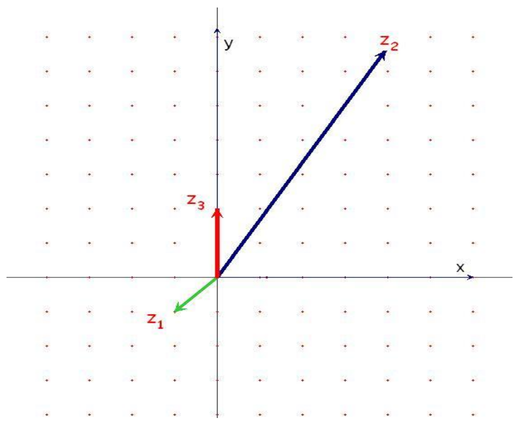
Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 9.

La representación en el plano es:



Solución del ejercicio 10.

Para calcular el argumento de cada número complejo tenemos en cuenta la representación que hemos hecho en el ejercicio anterior, y así sabemos en que cuadrante se encuentra el número complejo.

a. $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \dfrac{-1}{-1} = 225^0$

ya que z_1 está situado en el tercer cuadrante.

b. $|z_2| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8$

$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = 60^0$
ya que z_2 está situado en el primer cuadrante.

c. $|z_3| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$
$\alpha_3 = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{0} = 90^0$
ya que z_3 está situado sobre el semieje positivo del eje de ordenadas.

3.4. Ficha 4: Distintas formas de expresar un número complejo: forma polar y forma trigonométrica

Hasta ahora hemos expresado los números complejos en su forma binómica $z = a + bi$. Pero hay otras dos formas de expresarlos que son muy útiles para el cálculo.

Forma polar Un número complejo $z = a + bi$ se puede expresar en forma polar como $\mathbf{r}_\alpha$, en donde $\mathbf{r}$ representa el módulo y α el argumento del número complejo.

Dos números complejos, expresados en forma polar son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos difieren en $2k\pi$ radianes, siendo k un número entero.

$$r_\alpha = r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha = \alpha' \end{cases}$$

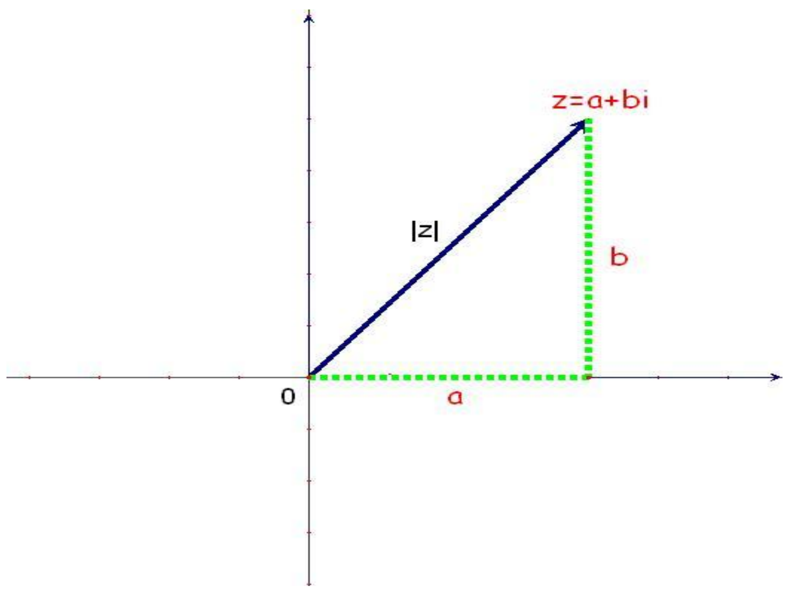
a)*Paso de forma binómica a polar*

Tenemos el número complejo expresado en forma binómica $z = a + bi$, para pasarlo a forma polar basta con calcular el módulo (aplicando el teorema de Pitágoras) y el argumento (aplicando la definición de la tangente).

b)*Paso de forma polar a binómica*

Tenemos el número complejo expresado en forma polar $z = r_\alpha$, para pasarlo a forma binómica aplicamos las definiciones del seno y del coseno:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\alpha \\ \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{r} \Rightarrow b = r\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$



F. trigonom. Teniendo en cuenta las definiciones del seno y el coseno que acabamos de exponer, y sustituyendo los valores de a y b en la expresión del complejo en forma binómica, tenemos la forma trigonométrica:

$$z = a + bi = r\cos\alpha + ir\operatorname{sen}\alpha = r\left(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha\right)$$

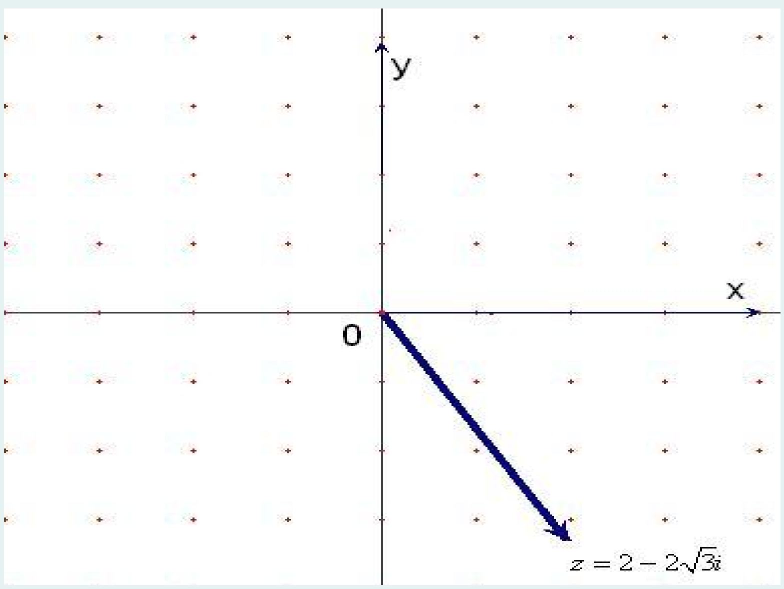
Ejemplo 9. Si tenemos el número complejo $z = 1_{270^0}$ expresado en forma polar, lo podemos pasar fácilmente a forma binómica expresándolo primero en forma trigonométrica:

$$z = 1 = 1(\cos 270^0 + \operatorname{sen} 270^0) = 1(0 - 1i) = -i$$

Ejemplo 10. El número complejo $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ que se encuentra expresado en forma binómica, también lo podemos expresar en forma polar. Para expresarlo en forma polar tenemos que calcular el módulo y el argumento.

$r = +\sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = +\sqrt{4 + 12} = +\sqrt{16} = 4$

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 300^0$



Para elegir el argumento α resulta muy práctico fijarse en la representación del número complejo. En la representación se ve que el número complejo está en el cuarto cuadrante.

$$z = 2 - 2\sqrt{3}i = 4_{300^0}$$

Y expresado en forma trigonométrica sería

$$z = 4(\cos 300^0 + \operatorname{sen} 300^0 i)$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 11. Expresar el número complejo $z = 2_{30^0}$ en:

a. Forma binómica.
b. Forma trigonométrica.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 12. Expresa el número complejo $z = -\sqrt{5} + \sqrt{5}i$:
a. Forma polar.
b. Forma trigonométrica.

Pulse aquí para ver la solución.

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 11.

a. $z = 2_{30^0} = 2(\cos 30^0 + i\text{sen}\, 30^0) = 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\dfrac{1}{2}i = \sqrt{3} + i$

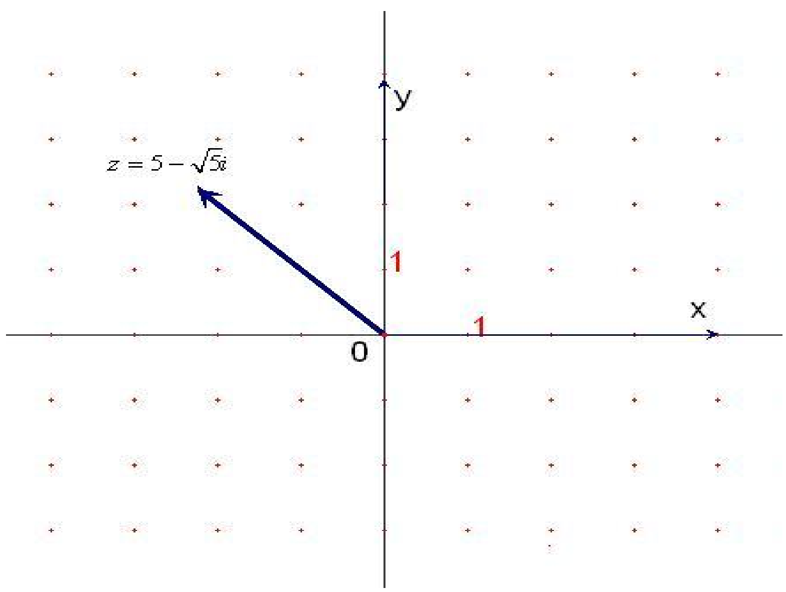
b. $z = 2_{30^0} = 2(\cos\ 30^0 + i\text{sen}\, 30^0)$

Solución al ejercicio 12.

a. Para expresar $z = -\sqrt{5} + \sqrt{5}i$ en forma polar necesitamos conocer su módulo y su argumento:

$$\begin{cases} r = +\sqrt{(-\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = +\sqrt{10} \\ \text{tg}\, \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = -1 \Rightarrow \alpha = 135^{\text{o}} \end{cases}$$

ya que z está en el segundo cuadrante, como podemos observar en su representación gráfica:



Entonces z expresado en forma polar es:

$$z = -\sqrt{5} + \sqrt{5}i = \left(\sqrt{10}\right)_{135^0}$$

b. Para expresar z en forma trigonométrica necesitamos el módulo y el argumento calculados en el apartado a) de este ejercicio:

$$z = -\sqrt{5} + \sqrt{5}i = \sqrt{10}(\cos 135^0 + i\text{sen}\, 135^0)$$

3.5. Ficha 5: Operaciones de números complejos en forma polar

Para sumar y restar números complejos debemos tenerlos escritos en forma binómica. Pero para el resto de las operaciones, sobre todo la potencia y la radicación, resulta más práctico tener los números expresados en forma polar:

Producto El producto de dos números complejos es otro número complejo que tiene por módulo la multiplicación de los módulos, y por argumento la suma de los argumentos:

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$$

Cociente El cociente de dos números complejos es otro número complejo que tiene por módulo la división de los módulos, y por argumento la resta de los argumentos

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$$

Potencia La potencia n-ésima de un número complejo es otro número complejo que tiene por módulo la potencia n-ésima del módulo, y por argumento n veces el argumento del complejo dado:

$$(r_\alpha)^n = r^n_{n\alpha}$$

Ejemplo 11. Si tenemos dos números complejos escritos en forma polar

$$z_1 = 3_{120^0} \qquad z_2 = 2_{60^0}$$

se pueden realizar fácilmente su producto, división y potencias cuartas:

- $z_1 \cdot z_2 = 3_{120^0} \cdot 2_{60^0} = (3 \cdot 2)_{120^0+60^0} = 6_{180^0}$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3_{120^0}}{2_{60^0}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)_{120^0-60^0} = \left(\dfrac{3}{2}\right)_{60^0}$
- $(z_1)^4 = (3_{120^0})^4 = 3^4_{4\cdot120^0} = 81_{480^0} = 81_{120^0}$
- $(z_2)^4 = (2_{60^0})^4 = 2^4_{4\cdot60^0} = 16_{240^0}$

Ejemplo 12. Para calcular la potencia de un número complejo resulta muy práctico tenerlo expresado en forma polar. De manera que si tenemos que calcular la potencia de un número complejo expresada en forma binómica (sobre todo de exponente mayor que 3) lo pasamos previamente a forma polar, se calcula la potencia, y si se necesita el resultado expresado en forma binómica, se deshace el cambio de forma polar a binómica.

Por ejemplo, para calcular $\left(3+3\sqrt{3}i\right)^5$escribimos el complejo $z = 3+3\sqrt{3}i$ en forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} |z| = +\sqrt{3^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2} = 6 \\ \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{3\sqrt{3}}{3} = 60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 3+3\sqrt{3}i = 6_{60^0}$$

Y ahora calculamos fácilmente z^5

$$\begin{aligned} z^5 &= \left(3+3\sqrt{3}i\right)^5 = \left(6_{60^0}\right)^5 = 7776_{300^0} \\ &= 7776(\cos 330^0 + i\,\mathrm{sen}\,330^0) = 3888\sqrt{3} + 3888i \end{aligned}$$

Fórm. Moivre La fórmula de Moivre es la potencia de un número complejo escrito en forma trigonométrica:

$$[r\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^n = r^n\,(\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha)$$

Si $\mathbf{r}=\mathbf{1}$, esta fórmula es muy útil para calcular seno y coseno de ángulos múltiples.

Por ejemplo para $n = 2$, la fórmula de Moivre queda:

$$(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\operatorname{sen} 2\alpha$$

Desarrollando el primer miembro por el cuadrado de una suma:

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^2 &= \cos^2\alpha + 2i\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + 2i\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

Luego nos queda:

$$\cos 2\alpha + i\operatorname{sen} 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + 2i\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\end{array}\right.$$

ya que para que se cumpla la igualdad las partes reales y las partes imaginarias tienen que ser iguales respectivamente.

Ejemplo 13. Si necesitamos calcular cuánto vale la razón trigonométrica de $\operatorname{sen} 3\alpha$, lo podemos hacer calculando el cubo de un número complejo de módulo 1 y argumento α aplicando la fórmula de Moivre:

$$(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\operatorname{sen} 3\alpha$$

Desarrollando el primer miembro como el cubo de una suma:

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^3 &= \cos^3\alpha + 3\,(\cos\alpha)^2\, i\operatorname{sen}\alpha \\ &+ 3\cos\alpha\,(i\operatorname{sen}\alpha)^2 + (i\operatorname{sen}\alpha)^3 \\ &= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha - 3\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - i\operatorname{sen}^3\alpha\end{aligned}$$

Y sustituyendo en la fórmula de Moivre:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha + i\operatorname{sen} 3\alpha = \cos^3\alpha &- 3\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\ &+ \left(3\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha\right) i\end{aligned}$$

Para que se cumpla la igualdad dben ser iguales las partes reales y las partes imaginarias de los dos miembros de la igualdad:

$$\begin{cases}\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen} 3\alpha = 3\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha\end{cases}$$

Y así hemos conseguido saber cuánto vale el $\operatorname{sen} 3\alpha$ y $\cos 3\alpha$

Raíces La raíz cuadrada de un número z, $\sqrt{z}$, es otro número que al cuadrado, es igual a z; la raíz cúbica de un número z, $\sqrt[3]{z}$, es otro número que elevado al cubo, es igual a z. Por lo tanto, la raíz n-ésima (de índice n) de z, $\sqrt[n]{z}$, es otro número que elevado a n, es igual a z.

Un número complejo z distinto de cero va a tener tantas raíces n-ésimas, $\sqrt[n]{z}$, como indica el índice de la raíz (n)

Por ejemplo, en los números reales, sabemos que $\sqrt{16}$ tiene dos soluciones 4 y (-4), ya que es una raíz cuadrada y $(n = 2)$. Lo podemos comprobar teniendo en cuenta que cualquier número real está incluido dentro de los complejos y lo podemos escribir en forma polar, es decir, $\sqrt{16} = \sqrt{16_{0^0}}$, y tendríamos:

a. $4 = 4_{0^0}$ es una raíz cuadrada de 16_{0^0}, porque $(4_{0^0})^2 = 4^2_{2\cdot 0^0} = 16_{0^0}$

b. también el número real $-4 = 4_{180^0}$ es una raíz, porque $(4_{180^0})^2 = 4^2_{2\cdot 180^0} = 16_{360^0} = 16_{0^0}$

Las raíces n-ésimas de un número complejo $\sqrt[n]{r_\alpha}$ *son n números complejos*. Todos ellos tienen el mismo módulo y sus argumentos son diferentes. Los calcularemos de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \text{Módulo}: \quad |z| = \sqrt[n]{r} \\ \alpha_i = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} = \dfrac{\alpha + 360^0\pi}{n}, \qquad k = 0, 1.., n-1 \end{cases}$$

En general las raíces de un número complejo están en los vértices de un polígono regular de tantos lados como indica el índice n de la raíz, y cuyo radio es igual a $\sqrt[n]{r}$.

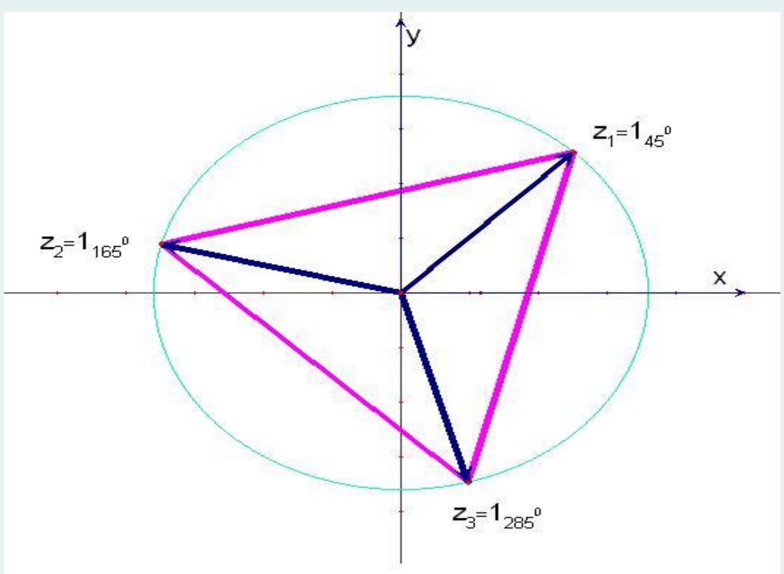
Ejemplo 14. Queremos calcular las raíces cúbicas de $z = 27_{135^0}$. Sabemos que son tres, todas ellas con el mismo módulo pero distinto argumento:

$$\begin{cases} \text{Módulo}: \quad |z| = \sqrt[3]{27} = 3 \\ \text{argumentos}: \quad \alpha_i = \dfrac{135^0 + 360^0 k}{3}, \quad k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

Las tres raíces solución son:

$$\begin{array}{l} k = 0 \rightarrow \alpha_1 = 45^0 \quad \rightarrow z_1 = 3_{45^0} \\ k = 1 \rightarrow \alpha_2 = 165^0 \quad \rightarrow z_2 = 3_{165^0} \\ k = 2 \rightarrow \alpha_3 = 285^0 \quad \rightarrow z_3 = 3_{285^0} \end{array}$$

Si pintamos las tres soluciones que nos han quedado, nos damos cuenta que al unirlas forman un triángulo equilátero, ya que se encuentran sobre una circunferencia de radio 3 y los argumentos de las tres difieren en $120^0 = \dfrac{360^0}{n} = \dfrac{360^0}{3}$



Ejercicios propuestos

Ejercicio 13. Dados los números complejos

$$z_1 = 3_{90^0} \qquad z_2 = \sqrt{12}_{210^0}$$

realiza las siguientes operaciones:

a. $z_1 \cdot z_2$
b. $\dfrac{z_1}{z_2}$
c. $(z_1)^5$

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 14. Calcula $(-1+i)^6$, y expresa el número complejo solución en forma polar.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 15. Utilizando la fórmula de Moivre, calcula el valor del $\cos 4\alpha$ y $\operatorname{sen} 4\alpha$ en función de los valores de $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 16. Resuelva la ecuación $z^6 + 1 = 0$.

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 13.

a. $z_1 \cdot z_2 = 3_{90^0} \cdot \sqrt{12}_{210^0} = \left(3\sqrt{12}\right)_{90^0+210^0} = \left(3\sqrt{12}\right)_{310^0}$

b. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3_{90^0}}{\sqrt{12}_{210^0}} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{12}}\right)_{-120^0} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{12}}\right)_{240^0}$

c. $(z_1)^5 = (3_{90^0})^5 = 3^5_{5\cdot 90^0} = (729)_{450^0} = (729)_{90^0}$

Solución del ejercicio 14.

Para realizar una potencia lo más práctico es tener escrito el número complejo en forma polar:

$-1 + i = \sqrt{2}_{135^0}$
$(-1+i)^6 = (\sqrt{2}_{135^0})^6 = (\sqrt{2})^6_{6\cdot 135^0} = 8_{810^0} = 8_{90^0}$

Si queremos tener el número complejo en forma binómica:

$$8_{90^0} = 8(\cos 90^0 + i\operatorname{sen} 90^0) = 8i$$

Solución del ejercicio 15.

Si necesitamos calcular cuánto valen las razones trigonométricas $\operatorname{sen} 4\alpha$ y $\cos 4\alpha$, lo podemos hacer aplicando la formula de Moivre que es la potencia de un número complejo de módulo 1 y argumento α escrito en forma trigonométrica:

$$(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^4 = \cos 4\alpha + i\operatorname{sen} 4\alpha$$

Desarrollando el primer miembro como la potencia cuarta de una suma:

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\text{sen}\,\alpha)^4 &= (\cos\alpha + i\text{sen}\,\alpha)^2(\cos\alpha + i\text{sen}\,\alpha)^2\\ &= (\cos^2\alpha - \text{sen}\,^2\alpha + 2i\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)\cdot\\ &(\cos^2\alpha - \text{sen}\,^2\alpha + 2i\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)\\ &= \cos^4\alpha - \cos^2\alpha\text{sen}\,^2\alpha + 2i\cos^3\alpha\text{sen}\,\alpha\\ &- \text{sen}\,^2\alpha\cos^2\alpha + \text{sen}\,^4\alpha - -2i\cos\alpha\text{sen}\,^3\alpha\\ &+ 2i\cos^3\alpha\text{sen}\,\alpha - 2\cos\alpha\text{sen}\,^3\alpha - 4\cos^2\alpha\text{sen}\,^2\alpha\end{aligned}$$

Y sustituyendo en la fórmula de Moivre para $n = 4$:

$$\begin{aligned}\cos 4\alpha + i\text{sen}\,4\alpha &= cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\text{sen}\,^2\alpha + \text{sen}\,^4\alpha\\ &+ (4\cos^3\alpha\text{sen}\,\alpha - 4\cos\alpha\text{sen}\,^3\alpha)i\end{aligned}$$

Esta igualdad se cumple si la parte real del número complejo del primer miembro es igual a la parte real del número complejo del segundo miembro. Y respectivamente con las partes imaginarias:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos 4\alpha = cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\text{sen}\,^2\alpha + \text{sen}\,^4\alpha\\ \text{sen}\,4\alpha = 4\cos^3\alpha\text{sen}\,\alpha - 4\cos\alpha\text{sen}\,^3\alpha\end{array}\right.$$

Y así hemos conseguido saber cuánto valen $\text{sen}\,4\alpha$ y $\cos 4\alpha$.

Solución del ejercicio 16.

$$z^6 + 1 = 0 \Longrightarrow z = \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^0}}$$

Es decir que tenemos que calcularla raíz sexta del número complejo $z = \sqrt[6]{1_{180^0}}$, que tiene seis soluciones en el conjunto de los numeros complejos.

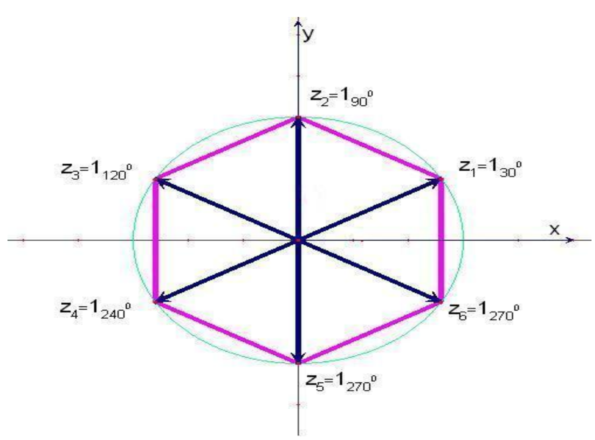
Todas ellas tiene el mismo módulo pero distinto argumento:

$$\begin{cases} \text{Módulo}: \quad |z| = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1 \\ \text{argumentos}: \quad \alpha_i = \dfrac{180^0 + 360^0 k}{6}, \qquad k = 0,1,2,3,4,5 \end{cases}$$

Damos valores a k y nos quedan las 6 soluciones siguientes:

$$\begin{array}{l} k = 0 \longrightarrow \ z_1 = 1_{30^0} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ k = 1 \longrightarrow \ z_2 = 1_{90^0} = i \\ k = 2 \longrightarrow \ z_3 = 1_{150^0} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ k = 3 \longrightarrow \ z_4 = 1_{210^0} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ k = 4 \longrightarrow \ z_5 = 1_{270^0} = -i \\ k = 5 \longrightarrow \ z_6 = 1_{330^0} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{array}$$

Si las representamos y las unimos queda un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1 (el módulo de $z = 1_{180^0}$).



4. Prueba de autoevaluación

La raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución	**Verdadero**	**Falso**
El conjugado de un número real (parte imaginaria cero) es el propio número real	**Verdadero**	**Falso**
El producto de un número complejo por su conjugado es un número imaginario puro	**Verdadero**	**Falso**
$\dfrac{3-i}{i} = -1-7i$	**Verdadero**	**Falso**
$-1+i = 2_{135^0}$	**Verdadero**	**Falso**
El número 4_{180^0} en forma binómica es -4	**Verdadero**	**Falso**
$\dfrac{2_{60^0}}{3_{120^0}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)_{300^0}$	**Verdadero**	**Falso**
El argumento $\alpha = arco\text{sen}\,\dfrac{b}{a}$	**Verdadero**	**Falso**
La fórmula de Moivre sirve si $n=2$ para calcular $\text{sen}\,2\alpha$ y $\cos 2\alpha$ en función de $\text{sen}\,\alpha$ y $\cos\alpha$	**Verdadero**	**Falso**
Las soluciones de la ecuación $z^4+2=0$ son cuatro, y todas ellas tienen de módulo 2	**Verdadero**	**Falso**

Bibliografía

[1] Arias, J.M.; Maza, I.: *Matemáticas 1* para 1º Bachillerato, Ciencias de la Salud y Tecnología. Editorial Casals. Libro con teoría y ejemplos resueltos. Nivel Bachillerato.

[2] Barceló, R.; Bujosa, J.M.; Cañadilla, J.L.; Fargas, M.; Font,V.: *Matemáticas 1* para 1º Bachillerato. Ciencias de la Salud y Tecnología. Editorial Alamadraba. Libro con teoría y ejemplos resueltos. Nivel Bachillerato.

[3] Ballvé, M. E.; Delgado, M.; Porto, A. M.; Ulecia, T.: *Problemas de Matemáticas especiales.* 2.a ed. Editorial Sanz y Torres: Libro de ejercicios correspondiente al libro de "Matemáticas especiales". Muchos ejercicios resueltos.

[4] http://personales.unican.es/gonzaleof/. Página web con 4 cursos de Matemáticas (Primero y Segundo de Bachillerato, Ciencias y Sociales). Material de exposición clara, con numerosos ejemplos y ejercicios.

[5] http://w3.cnice.mec.es/Descartes/index.html. El proyecto Descartes ha sido desarrollado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes. Es una herramienta capaz de generar materiales interactivos (Descartes) y se han construido con ella más de cien unidades didácticas de los dis-

tintos cursos de la enseñanza secundaria, accesibles a toda la comunidad educativa a través de esta página.

[6] Martín, M.A.; Morán, M.; Rey, J.M.; Reyes, M.:*Matemáticas 1* para 1º Bachillerato, Ciencias de la Salud y Tecnología. Editorial Bruño. Libro con teoría y ejemplos muy bien explicados. Nivel Bachillerato.

[7] Nevot, A.; Negro, A.; Rodriguez, R.; Soler, J.: *Matemáticas 1* para 1º Bachillerato. Ciencias de la Salud y Tecnología. Editorial McGrawHill. Libro con teoría y ejemplos resueltos. Nivel Bachillerato.

[8] Vizmanos, J.R.; Anzola, M.: *Matemáticas 1* para 1º Bachillerato, Ciencias de la Salud y Tecnología. Editorial S.M. Libro con teoría y ejemplos resueltos. Nivel Bachillerato.

Índice alfabético